

CHUYÊN ĐỀ: CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là cấp số cộng nếu $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \geq 2, n \geq 2, d$ là số không đổi.

Số d gọi là công sai của cấp số cộng, $d = u_n - u_{n-1}$ với $n \geq 2, n \geq 2$.

Nếu $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d , ta có:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad \text{với } n \geq 2, n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d .

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ta có:

$$S_n = (u_1 + u_n)n/2 \quad \text{hoặc} \quad S_n = [2u_1 + (n-1)d]n/2.$$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là cấp số nhân nếu $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2, n \geq 2, q$ là số không đổi.

Số q gọi là công bội của cấp số nhân. Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$q = \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad \text{với } n \geq 2, n \geq 2.$$

Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q , ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{với } n \geq 2, n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q (q \neq 1)$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ta có:

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thi sinh chỉ chọn một phương án.

Ví dụ 1. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 5n$ **B.** $u_n = 2 - 5n$ **C.** $u_n = 5n - 2$ **D.** $u_n = 5 + n^2$

Lời giải

Chọn B

Ở đáp án B, ta có: $u_n - u_{n-1} = (2 - 5n) - [2 - 5(n-1)] = -5$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = -5$.

Ở đáp án A, ba số hạng đầu của dãy số là: 5; 10; 15 nên dãy số cho ở đáp án A không là cấp số cộng. Tương tự, dãy số cho ở đáp án C, D cũng không là cấp số cộng.

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 + u_7 = 19$. Giá trị của $u_2 + u_{10}$ là:

A. 38 **B.** 29 **C.** 12 **D.** 19

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát, ta có:

$$u_5 + u_7 = (u_1 + 4d) + (u_1 + 6d) = 2u_1 + 10d = 19$$

$$\text{Khi đó, } u_2 + u_{10} = (u_1 + d) + (u_1 + 9d) = 2u_1 + 10d = 19$$

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 1$ với $u_2 = -3$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -13$. Số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó là:

A. $u_1 = 1, q = 3$ **B.** $u_1 = -1, q = -3$

C. $u_1 = -1, q = 3$ **D.** $u_1 = 1, q = -3$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } \{u_1 \cdot q = -3, u_1(1 + q + q^2) = -13\}$$

$$\text{Từ đó, suy ra: } 1 + q + q^2 = 13 \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow [q = 3 \vee q = \frac{1}{3}]$$

Mà $q > 1$ nên $q = 3$. Thay $q = 3$ vào phương trình $u_1 \cdot q = -3$, ta được $u_1 = -1$.

Vậy cấp số nhân đó có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công bội $q = 3$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n = 2n^2 - 4n$.

a) Số hạng đầu $u_1 = -2$, số hạng thứ hai $u_2 = 2$.

b) Với $n \geq 2$ thì $S_n - S_{n-1} = 4n - 6$.

c) Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là -6 .

d) Tổng $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{100}$ là 5000 .

Lời giải

+ Ta có: $S_1 = u_1 = -2$; $S_2 = u_1 + u_2 = 0$. Do đó, $u_2 = S_2 - S_1 = 2$.

+ Với $n \geq 2$ thì $S_n - S_{n-1} = (2n^2 - 4n) - [2(n-1)^2 - 4(n-1)] = 4n - 6$.

$u_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 6$. Do đó, $u_n - u_{n-1} = 4n - 6 - [4(n-1) - 6] = 4$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng có công sai là 4 .

+ Các số $u_2, u_4, u_6, \dots, u_{100}$ lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_2 = 2$, công sai $d' = 2$, $u_{100} = 4 \cdot 100 - 6 = 394$.

Ta có, $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{100}$ là tổng của 50 số hạng.

Vậy $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{100} = (u_2 + u_{100}) \cdot 50 = 9900$.

Đáp án: a) Đ, b) Đ, c) S, d) S.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 8, u_{n+1} = 4u_n - 9$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = u_n - 3$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1 = 5$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = -3$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 + 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

Lời giải

+ Ta có: $v_1 = u_1 - 3 = 8 - 3 = 5$.

+ $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 4u_n - 9 - 3 = 4u_n - 12 = 4(u_n - 3) = 4v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 5$, công bội $q = -3$.

+ $v_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$; $u_n = 3 + v_n = 3 + 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

Đáp án: a) Đ, b) S, c) S, d) S.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 6. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 1818 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 2424 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,81,8 triệu đồng.

Tìm nn (với $n \in \mathbb{N}^*$) để từ năm thứ nn trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong nn năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất?

Lời Giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=120$ triệu đồng, công sai $d=18$ triệu đồng.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $v_1=24$ triệu đồng, công sai $d'=1,8$ triệu đồng.

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong nn năm ở phương án thứ nhất là tổng nn số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_n = [2 \cdot 120 + (n-1) \cdot 18] \cdot n = 9n^2 + 111n \quad (triệu \text{ đồng}).$$

Do 11 năm có 44 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong nn năm ở phương án thứ hai là tổng $4n$ số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{4n} = [2 \cdot 24 + (4n-1) \cdot 1,8] \cdot 4n = 14,4n^2 + 92,4n \quad (triệu \text{ đồng}).$$

Xét bất phương trình:

$$14,4n^2 + 92,4n > 9n^2 + 111n \Leftrightarrow n > 319 \approx 3,44 \Leftrightarrow n > 319 \approx 3,44$$

Vậy từ năm thứ 44 trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong các năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất.

Ví dụ 7. Cho hình vuông C_1C_1 có cạnh bằng 11. Gọi C_2C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1C_1 ; C_3C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_2C_2 ; ... Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \dots; C_n; \dots; C_1; C_2; C_3; \dots; C_n; \dots$. Diện tích của hình vuông $C_{2025}C_{2025}$ có dạng $12a^{12}a$. Tìm a .

Lời Giải

Gọi u_n là cạnh của hình vuông C_nC_n .

$$\text{Ta có: } u_1=1; u_2=12 \cdot u_1 \sqrt{2} = u_1 \cdot \sqrt{2}; u_1=1; u_2=12 \cdot u_1^2 = u_1 \cdot 2; u_3=12 \cdot u_2 \sqrt{2} = u_2 \cdot \sqrt{2}; u_3=12 \cdot u_2^2 = u_2 \cdot 2; \dots$$

Cứ như vậy, dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=1, u_1=1$, công bội $q=\sqrt{2}$.

Do đó, $u_{2025} = (\sqrt{2})^{2024} u_1 = 2^{1012}$ nên diện tích hình vuông $C_{2025}C_{2025}$ là:

$$u_{2025}^2 = 2^{2024} u_1^2 = 2^{2024}. \text{ Vậy } a = 2^{2024}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. (MĐ1) Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. $2; 0; -2; -4; -52; 0; -2; -4; -5$. B. $12; -12; -32; -52; -72$. C. $12; -12; -32; -52; -72$.

C. $\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}$. D. $-7; -4; -1; 2; 5$.

Lời giải

Chọn A

Xét $2; 0; -2; -4; -52; 0; -2; -4; -5$ ta có $0-2=-2$; $-2-0=-2$; $-4+2=-2$; $-5+40-2=-2$; $-2-0=-2$; $-4+2=-2$; $-5+4$

Câu 2. (MĐ2) Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3.2^n$. B. $u_n=3-2n$. C. $u_n=2n+3$. D. $u_n=2+n^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n=3.2^n$; $u_{n+1}=3.2^{n+1}$ $\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3.2^{n+1}-3.2^n=3.2^n(2-1)=3.2^n$ không là cấp số cộng

Ta có $u_n=3-2n$; $u_{n+1}=3-2(n+1)$ $\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3-2(n+1)-(3-2n)=-2$ là cấp số cộng

Câu 3. (MĐ2) Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3=-2$; $u_7=180$. Số hạng u_{11} bằng:

A. 3838. B. 2020. C. 4343. D. 3333.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} u_3=-2 \\ u_7=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+2d=-2 \\ u_1+6d=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-12 \\ d=5 \end{cases}$

Số hạng $u_{11}=u_1+10d=-12+10.5=38$

Câu 4. (MĐ3) Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_4+u_{16}=48$. Số hạng u_{10} bằng:

A. 4848. B. 2424. C. 9696. D. 7272.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_4+u_{16}=48 \Leftrightarrow u_1+3d+u_1+13d=48 \Leftrightarrow 2u_1+16d=48$

$\Leftrightarrow 2u_1+16d=48 \Leftrightarrow u_1+8d=24 \Leftrightarrow u_{10}=u_1+9d=24 \Leftrightarrow u_{10}=24$.

Câu 5. (MĐ3) Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_9=5$ và $u_{13}=2u_6+5$. Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó là:

A. $u_1=-3; d=4$. B. $u_1=3; d=4$. C. $u_1=4; d=3$. D. $u_1=-4; d=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta

có: $\begin{cases} u_9=5 \\ u_{13}=2u_6+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+8d=5 \\ u_1+12d=2(u_1+5d)+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+8d=5 \\ u_1+12d=2u_1+10d+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1-3d=0 \\ u_1-2d=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3d=4 \\ u_1=3d=4 \end{cases}$

Câu 6. (MĐ3) Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=13$, công sai $d=-1$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng -425 . Giá trị của n bằng:

A. 3030. B. 6060. C. 4545. D. 1515.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_n = [2u_1 + (n-1)d]n = [2 \cdot 13 + (n-1)(-1)]n = -425 = [2 \cdot 13 + (n-1)(-1)]n = -425$

$\Leftrightarrow (53-n)n = -850 \Leftrightarrow n^2 - 53n - 850 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 53n - 850 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=30 \\ n=-853 \end{cases} \text{ (loại)} \Leftrightarrow n=30$

Câu 7. (MĐ3) Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2+u_9=15$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng:

A. 150. B. 75. C. 120. D. 90.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_2+u_9=15 \Leftrightarrow 2u_1+9d=15$

Mà $S_{10} = [2u_1 + (10-1)d]10 = 5(2u_1+9d) = 5 \cdot 15 = 75$

Câu 8. (MĐ3) Cho (u_n) là cấp số cộng. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số đó. Biết $S_{10}=365; S_{15}=435$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

A. $u_n=50-3n$. B. $u_n=53+3n$. C. $u_n=50+3n$. D. $u_n=53-3n$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} S_{10}=365 \\ S_{15}=435 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\} |$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{10} = [2u_1 + (10-1)d]10 = 365 \\ S_{15} = [2u_1 + (15-1)d]15 = 435 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2u_1 + 9d = 73 \\ 2u_1 + 14d = 58 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 50 \\ d = -3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2u_1 + 9d = 73 \\ 2u_1 + 14d = 58 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 50 \\ d = -3 \end{array} \right.$$

Vậy công thức của số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d = 50 + (n-1)(-3) = 53 - 3n$

Câu 9. (MĐ1) Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3(12)^{n+1}$ là cấp số cộng. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. (u_n) không phải là cấp số nhân.
- B. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ công bội $q = 12$.
- C. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 34$ công bội $q = 12$.
- D. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 32$ công bội $q = 12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = 3(12)^{n+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 34; u_2 = 38 \\ d = u_2 - u_1 = 12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 34; u_2 = 38 \\ d = u_2 - u_1 = 12 \end{array} \right.$$

Câu 10. (MĐ3) Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = 15n - 1$
- B. $u_n = 15^{n-1}$
- C. $u_n = 15n - 1$
- D. $u_n = 15^{n-1}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = 15n - 1 \Rightarrow u_{n+1} = 15(n+1) - 1 = 15n + 14$
 $\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{15n + 14}{15n - 1} \neq 15 \Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân.

Câu 11. (MĐ3) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và công bội $q = -110$. Số -1102024 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 2024
- B. Số hạng thứ 2025
- C. Số hạng thứ 2023
- D. Số hạng thứ 2026

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_n = u_1(1 - q^n) / (1 - q) \Leftrightarrow -1102024 = (-1)(1 - (-110)^n) / (1 - (-110)) \Leftrightarrow -1102024 = (-1)(1 - (-110)^n) / (1 - (-110))$

$$\Leftrightarrow n = 2025 \Leftrightarrow n = 2025.$$

Câu 12. (MĐ3) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 13; u_4 = -9$. Công bội q của cấp số nhân là:

- A.** 13 **B.** -13 **C.** -3 **D.** 33.

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $u_4 = u_1 \cdot q^3 = -9 \Leftrightarrow 13 \cdot q^3 = -9 \Leftrightarrow q^3 = -9/13$

$$\Leftrightarrow q^3 = -27/27 = (-3)^3 \Leftrightarrow q = -3$$

Câu 13. (MĐ3) Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = 12 \cdot u_{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số là:

- A.** $u_n = 12^{n-2}$ **B.** $u_n = 12^{n-1}$ **C.** $u_n = 12^n$ **D.** $u_n = 12^{n+1}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $u_2 = 12 \cdot u_1 = 24; u_3 = 12 \cdot u_2 = 288; u_4 = 12 \cdot u_3 = 3456; \dots$

Vì $u_2/u_1 = u_3/u_2 = u_4/u_3 = \dots = 12$. Nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = 2$ và $q = 12$. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot (12)^{n-1}$

$$= (12)^{n-1} \cdot 2 = 2 \cdot (12)^{n-1}$$

Câu 14. (MĐ3) Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_2 \cdot u_5 = -243$. Tích $u_3 \cdot u_4$ bằng:

- A.** -81 **B.** -243 **C.** 81 **D.** 243

Lời giải**Chọn B**

Ta có $u_2 \cdot u_5 = -243 \Leftrightarrow u_1 q \cdot u_1 q^4 = -243 \Leftrightarrow u_1^2 q^5 = -243$

$$\Leftrightarrow u_1 \cdot q^5 = -243 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^5 = -243$$

Mà $u_3 \cdot u_4 = u_1 q^2 \cdot u_1 q^3 = u_1^2 q^5 = -243$

Câu 15. (MĐ2) Cho (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là:

- A.** 1023 **B.** -1025 **C.** 1025 **D.** -1023 .

Lời giải

a) $v_1=3v_1=3$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số cộng có công sai $d=4$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n=7-4n$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n=27-4n$.

Lời giải

+ Ta có: $v_1=u_1+2u_1=3v_1=u_1+2u_1=3$.

+ Theo giả thiết, ta

có $v_n=u_n+2u_{n+1}$ nên $v_{n+1}=1+2u_{n+1}$.

Do $u_{n+1}=u_n-2$ nên $1+2u_{n+1}=1+2(u_n-2)=2u_n-3$. Suy ra $v_{n+1}=1+2(1u_n-2)$.

Khi đó, $v_{n+1}-v_n=1+2u_n-4-(1+2u_{n-1})=-4$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1=3$, công sai $d=-4$.

+ Ta có: $v_n=v_1+(n-1)d=3+(n-1)(-4)=7-4n$.

+ Từ $v_n=u_n+2u_{n+1}$ suy ra $u_n=2v_n-1=2(7-4n)-1=13-8n$.

Đáp án: a) **D**, b) **S**, c) **D**, d) **S**.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức: $S_n=1-3n^2$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng thứ nhất của dãy số là $u_1=-3$.

b) Số hạng thứ hai của dãy số là $u_2=-4$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=13n-2$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội là -13 .

Lời giải

+ $S_1=u_1=-3$, $S_2=u_1+u_2=-4$ nên $u_2=S_2-S_1=-1$.

+ Ta có: $u_n=S_n-S_{n-1}=-13n^2+13(n-1)^2=-13n^2+13(n^2-2n+1)=-26n+13$ với mọi $n \geq 2$. Mà $u_1=-3=-13 \cdot 1 + 13$ nên $u_n=-13n+13$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Lại có $u_n=13 \cdot \frac{1}{13} u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=-3$ và công bội $q=13$.

Đáp án: a) **D**, b) **S**, c) **S**, d) **S**.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1=-17, u_{n+1}=5u_n-12$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n=3-u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1=10$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội bằng 15 .

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = 25n$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 - 4.5n$.

Lời giải

Ta có: $v_1 = 3 - u_1 = 10$.

$v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - (5u_n - 12) = 5(3 - u_n) = 5.v_n$

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 10$, công bội bằng $q = 5$.

Vậy $v_n = 2.5^n$, $u_n = 3 - 4.5^n$.

Đáp án: a) **Đ**, b) **S**, c) **S**, d) **Đ**.

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. Một nhà thi đấu có 2020 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 3030 ghế, hàng thứ hai có 3131 ghế, hàng thứ ba có 3232 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 11 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 63200000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: nghìn đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Trả lời: 80000 đồng.

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 30$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng. Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là:

$$S_{20} = [2.30 + (20-1).1].20 = 790$$

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên có 790 vé được bán ra. Vậy giá tiền của một vé là: $63200000 : 790 = 80000$ (đồng).

Câu 22. Cho tập hợp A gồm 999 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A = \{1; 2; 3; \dots; 999\}$. Tìm số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Trả lời: 2401.

Gọi a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng $(a, b, c \in A)$.

Khi đó, $b - a = c - b$ hay $2b = a + c$. Do đó, a và c phải cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ nên số cách chọn hai số a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ là: $C_{249} + C_{250} = 1176 + 1225 = 2401$.

Với mỗi cách chọn hai số a, c có duy nhất một cách chọn số b . Vậy số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng là 2401.

Câu 23. Anh Minh kí hợp đồng lao động có thời hạn ở một công ty với phương án trả lương như sau: Quý thứ nhất, tiền lương là 2727 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 2,12,1 triệu. Tổng số tiền lương anh nhận được trong các năm đã đi làm là 684684 triệu đồng. Hỏi anh Minh đã làm ở công ty đó bao nhiêu năm?

Lời giải

Trả lời: 4.4.

Gọi số năm đã đi làm của anh Minh ở công ty đó là $n(n \in \mathbb{N}^*)$. Số quý làm việc là $4n$.

Khi đó, tổng số tiền thu được của anh Minh trong n năm đi làm là:

$$S = [2.27 + (4n - 1) \cdot 2,1] \cdot 4n = 684 \Rightarrow S = [2.27 + (4n - 1) \cdot 2,1] \cdot 4n = 684$$

$$\Leftrightarrow 84n^2 + 519n - 3420 = 0 \Leftrightarrow 84n^2 + 519n - 3420 = 0 \Leftrightarrow n = 4 \Leftrightarrow n = 4 \text{ hoặc } n = -28528. n = -28528.$$

Do n nguyên dương nên $n = 4$ năm.

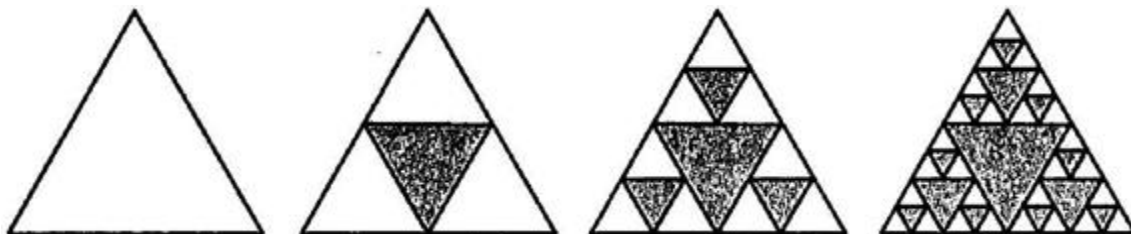
Câu 24. Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao 10m rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

Lời giải

Gọi u_n (m) là độ cao mà quả bóng đạt được sau khi nảy lên ở lần thứ n . Ta có: $u_1 = 10 \cdot 0,75 = 7,5$. Ta có, dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 7,5$ và công bội $q = 0,75$. Kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10, quả bóng đã được nảy lên 9 lần rồi lại rơi xuống. Do quãng đường quả bóng nảy lên và rơi xuống bằng nhau nên tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 là:

$$S = 10 + 2(u_1 + u_2 + \dots + u_9) = 10 + 2 \cdot 7,5 \cdot [1 - (0,75)^9] / (1 - 0,75) \approx 65,5 \text{ (m)}$$

Câu 25. Một tam giác đều có cạnh bằng 4cm. Chia tam giác đều đó thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Với mỗi tam giác nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ 55 (đơn vị: cm^2 , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

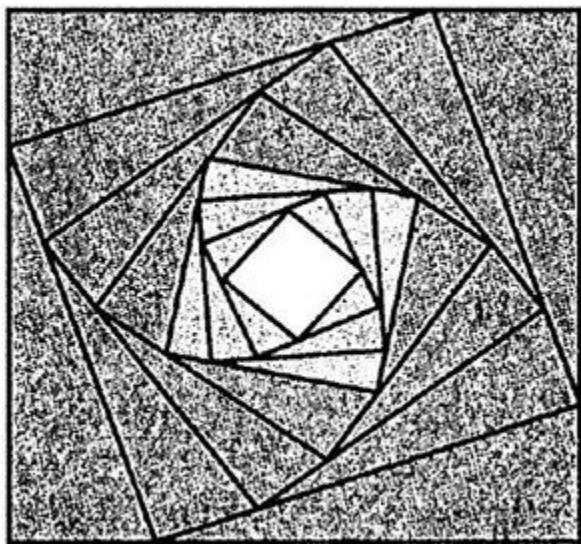
Gọi u_n là diện tích phần không được tô màu ở hình tô thứ n , S_0 là diện tích của tam giác ban đầu. Ta có: $u_1 = 34 \cdot S_0$. Do ở hình tô thứ n , diện tích phần không được tô màu bằng 34 diện tích phần không được tô màu ở hình tô trước đó nên dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 34 \cdot S_0$, công bội $q = 34$. Do đó,

$$u_n = 34 \cdot S_0 \cdot (34)^{n-1} = S_0 \cdot (34)^n$$

Vậy diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ n là: $S_n = S_0 [1 - (34)^n]$.

Thay $n = 5$, ta được $S_5 = 4\sqrt{3} \cdot (1 - 0,755) \approx 5,28$ (cm²).

Câu 26. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4 cm. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông C_1 thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ như Hình dưới. Tính diện tích của hình vuông thứ 66 (đơn vị: cm², làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi a_n (cm) là độ dài cạnh hình vuông thứ n .

$$Ta\ có: a_1 = 4, a_2 = \sqrt{(a_1/4)^2 + (3a_1/4)^2} = a_1 \cdot \sqrt{10}/4, a_2 = (a_1/4) \sqrt{10} = a_1 \cdot \sqrt{10}/4.$$

Cứ như thế, dãy (a_n) lập thành cấp số nhân có công bội $q = \sqrt{10}/4$. Do đó, $a_n = 4 \cdot (\sqrt{10}/4)^{n-1} = 4 \cdot (10)^{n-1/2}$.

Vậy diện tích hình vuông thứ 66 là $a_{66}^2 \approx 1,53$ (cm²).